

Ungleichheit realer Mengen

Ungleichheit zweier Mengen

Die Gleichheit ist das Ergebnis eines Vergleiches. Vergleichen ist eine Operation, bei der 2 Operanden miteinander verglichen werden. Das Ergebnis der Operation kann nur „größer“, „kleiner“ oder „gleich“ sein. Operanden können Eigenschaften, Größen, Größenwerte oder Zahlen sein.

Beispiel: Wenn ein Auto schneller als ein Motorrad fährt, dann ist $v_{\text{Auto}} > v_{\text{Motorrad}}$. Das das Auto schneller fährt, sieht man z.B. daran, daß es in der gleichen Zeiteinheit eine größere Strecke s zurücklegt als das Motorrad: $s_1 > s_2$.

Die Gleichheit zweier Mengen setzt eine Identität der kleinsten Mengeneinheiten voraus. Angenommen man möchte zwei Schafherden miteinander vergleichen. Am nahe Liegendsten ist der Vergleich der Anzahl der Schafe pro Herde. Herde A bestehe aus 100 Schafen und Herde B aus 105 Schafen. Ist Menge A dann größer als Menge B? Der Besitzer von Herde B wird möglicherweise „Ja“ sagen. Der Besitzer A könnte aber einwenden, daß in seiner Herde mehr ausgewachsene Schafe sind, die viel schwerer sind als die vielen Lämmer in Schafherde B. Das wiegen der beiden Schafherden möge dann tatsächlich ergeben, daß die Gesamtmasse von Herde A größer ist als die Gesamtmasse der Herde B.

Beim Vergleichen zweier Mengen vergleichen wir also immer zwei gleichartige Eigenschaften der beiden Mengen (im obigen Fall die Gesamtmassen der beiden Herden). Von zwei realen Mengen sind lediglich Eigenschaften der gleichen Art miteinander vergleichbar: ein Apfel hat z.B. eine Masse m_1 , der andere Apfel hat die Masse m_2 . Wir können die Gewichte der beiden Äpfel miteinander vergleichen, weil beide Gewichte

Eigenschaften der gleichen Art sind.

Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 wirklich einander gleich sein sollen, setzt das eine Identität der kleinsten Mengenelemente voraus. Jeder weiß, daß ein Schaf nicht genau das Gleiche sein kann, wie das andere. Sie unterscheiden sich garantiert in Größe, Gewicht, Alter, Aussehen, etc. pp.

Vollständige Identität der Mengenelemente sind für uns Menschen höchstens im mikroskopischen Bereich der Materie vorstellbar. Wir Menschen können ein Elektron nicht von einem anderen unterscheiden, so daß die Behauptung 10 Elektronen = 10 Elektronen möglicherweise stimmt. Wenn nun aber ein Quantenphysiker ankommt und nachweist, daß in der einen Menge mehr linksdrehende Elektronen sind als in der anderen, ist die Gleichsetzung der beiden Mengen schon wieder fraglich.

Um diesen Schwierigkeiten von vornherein aus dem Weg zu gehen, stelle ich die These auf, daß zwei reale Mengen per se nicht das Gleiche sind. Vergleichbar sind lediglich gleichartige Eigenschaften der beiden Mengen.

Zwei verschiedene Mengen können niemals das Gleiche sein. Die Ungleichheit steckt schon verbal mit in dem Begriff „verschieden“. Bsp.: Äpfel sind etwas anderes als Birnen, sie sind also verschieden voneinander, also können Äpfel niemals das Gleiche sein wie Birnen. Selbst zwei Mengen der gleichen Art, wie z.B. 1 Apfel und noch 1 Apfel sind nicht das Gleiche. Bei der einen Teilmenge kann es sich um einen großen, bei der anderen um einen kleinen Apfel handeln, um einen roten oder einen grünen, etc. pp.

Selbst bei der Gleichsetzung von 1 Rock = 1 Rock gehen wir von einer Gleichheit der Eigenschaften aus. Ein Rock ist ein Gegenstand, mit dem sich eine Frau bekleidet. Die Fähigkeit, jemanden zu bekleiden, ist aber eine Eigenschaft des Gegenstandes und nicht der Gegenstand selber. Die Aussage „1 Rock ist gleich 1 Rock“ ist genau genommen falsch, weil es

sich in dem einen Fall um einen Faltenrock, in dem anderen Fall um einen Minirock handeln kann. Ein Faltenrock ist nun aber wieder etwas anderes als Minirock – obwohl beide dieselbe Funktion (Eigenschaft) haben.

prinzipielle Inkomparabilität realer Mengen

Aufgrund der prinzipiellen Ungleichheit realer Mengen kann man sagen, daß reale Mengen von vornherein nicht vergleichbar sind. Wir können also festlegen, daß reale Mengen absolut inkomparabel sind. Es sind lediglich die vergleichbaren Eigenschaften der realen Mengen miteinander vergleichbar.

Inkomparabilität heißt zu deutsch „nicht vergleichbar“.